



TITLE:

表面と界面のある磁性流体の理論 解析(流体における波動現象の数理 とその応用)

AUTHOR(S):

水田, 洋

CITATION:

水田, 洋. 表面と界面のある磁性流体の理論解析(流体における波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1993, 830: 226-235

ISSUE DATE:

1993-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83340>

RIGHT:

表面と界面のある磁性流体の理論解析

北大工学部 水 田 洋 (Yo Mizuta)

1 はじめに

二層流体中には表面波モード (barotropic mode, fast mode) と界面波モード (baroclinic mode, slow mode) があることが知られている. 前者は表面変動に, 後者は界面変動に起因するが, いずれのモードにも両方の変動が混在している. これらのモードは閉鎖系では定在波, 開放系では進行波となり, 非線形相互作用によって互いに共鳴的に結合する. これらの励起には, 閉鎖系では加振が, 開放系では壁面振動が多く用いられる.

磁性流体は, マグネタイトの超微粒子を界面活性剤により水やケロシンなどの流体に分散させ, 磁場に感応するようにしたものである. したがって, もし磁性流体で二層流体を形成すると, モードの励起が加振や壁面振動以外の方法で行われたり, 磁性流体特有の波動が非線形相互作用に介在することになる.

本稿では, 磁性流体による二層流体を扱う基礎として, 表面張力, 界面張力, 重力などの外力, 水平磁場, 鉛直磁場を考慮に入れた, 線形の normal mode 方程式を導いた. normal mode 方程式は, 外力や磁場が時間変化する場合は, そのままの形で数値実験・水槽実験との比較に使えるが, 外力や磁場が一定のときは, 波数-周波数空間に移して分散関係式を導き, 安定性の議論に用いることもできる.

2 Normal Mode 方程式

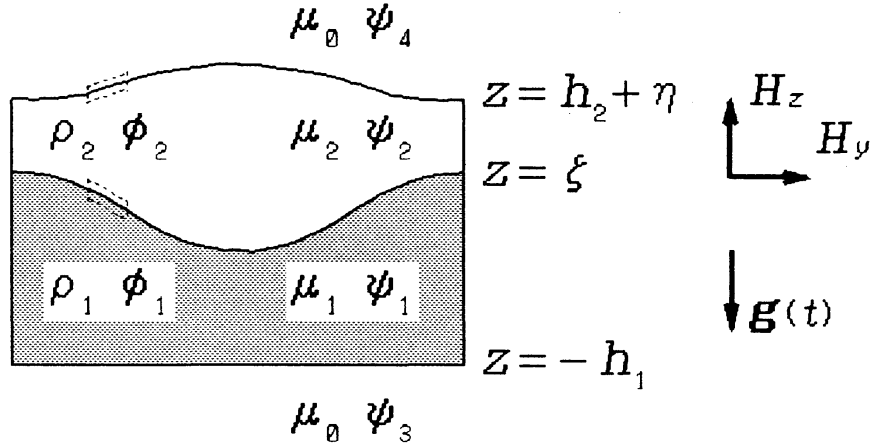


図 1: 表面と界面のある磁性流体

図 1 のように、容器内に密度と透磁率の異なる 2 種類の流体を満たし、下層、上層、下層下方、上層上方を 1, 2, 3, 4 と番号づける。ただし、領域 3, 4 の透磁率は、真空透磁率 μ_0 に等しいとする。また表面、界面、底の位置を $z = h_2 + \eta(x, y, t)$, $\zeta(x, y, t)$, $-h_1$ とする。以下では、渦なし、非圧縮性、非粘性の流体を仮定する。流速、外力を $u = \nabla \phi$, $f(t) = \nabla \Omega(t)$ のように与える速度ポテンシャル ϕ , 外力ポテンシャル Ω を導入し、密度、圧力、磁気応力を ρ, p, T と表せば、上層流体、下層流体の運動方程式より次式が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho_{1,2} \left(\frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial t} + \frac{u_{1,2}^2}{2} - \Omega_{1,2} \right) + p_{1,2} \right] \equiv \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial x_i} = \frac{\partial (T_{1,2})_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1)$$

これを表面と界面をそれぞれはさむ薄い層内で積分すると、表面・界面での力学的条件を得る。

$$\Phi_{4,2} - \Phi_{2,1} = T_{s,i}. \quad (2)$$

表面・界面での磁気応力差 $T_{s,i}$ を定義して η, ζ で表すのは次節で行うことにし、以下では、式 (2) の左辺を検討する。表面張力、界面張力を圧力差

$$\begin{aligned} z = h_2 + \eta: \quad p_4 - p_2 &= \gamma_s \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \\ z = \zeta: \quad p_2 - p_1 &= \gamma_i \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

により, また重力および時間変化する加振のような重力以外の加速度を外力ポテンシャル

$$\begin{aligned} z = h_2 + \eta : \quad \Omega_2 &= -g(t)(h_2 + \eta), \\ z = \zeta : \quad \Omega_{2,1} &= -g(t)\zeta \end{aligned} \quad (4)$$

によって考慮し, 更に, η, ζ, ϕ について線形化する. これを線形化した運動学的条件と共に示すと, 次のようになる.

$$z = h_2 : \Phi_4 - \Phi_2 = \gamma_s \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + g(t)(h_2 + \eta) \right], \quad (5)$$

$$z = 0 : \Phi_2 - \Phi_1 = \gamma_i \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + (\rho_2 - \rho_1)g(t)\zeta, \quad (6)$$

$$z = h_2 : 0 = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad (7)$$

$$z = 0 : 0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, \quad (8)$$

$$z = -h_1 : 0 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}. \quad (9)$$

ここで, Benjamin と Ursell の容器内流体鉛直加振の解析 [1] に習って, η, ζ と各層の速度ポテンシャル $\phi_{1,2}$ を, Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2} + k^2 S_k = 0, \quad (10)$$

およびある境界条件を満たす基底関数 $S_k(x, y)$ で

$$\eta(x, y, t) = \sum_k S_k(x, y) p_k(t), \quad (11)$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_k S_k(x, y) q_k(t), \quad (12)$$

$$\phi_{1,2}(x, y, z, t) = \sum_k S_k(x, y) [A_{1k,2k}(t) \cosh kz + B_{1k,2k}(t) \sinh kz] \quad (13)$$

のように展開する. このとき, 式 (13) の速度ポテンシャルは, 渦無し, 非圧縮性の仮定から導かれた Laplace 方程式 $0 = \nabla^2 \phi$ を満たしている.

次に、式 (11) - (13) を式 (5) - (9) に代入すると、展開係数 $p_k, q_k, A_{1k,2k}, B_{1k,2k}$ に対する 6 本の方程式が得られる。これらから $A_{1k,2k}, B_{1k,2k}$ を消去すれば、

$$\begin{pmatrix} t_2 & -\Delta \\ -\Delta & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_k \\ \ddot{q}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_s(t) & 0 \\ 0 & g_i(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{sk} \\ T_{ik} \end{pmatrix} = 0, \quad (14)$$

$$t_{1,2} \equiv \frac{\rho_{1,2}}{k \tanh kh_{1,2}}, \quad \Delta \equiv \frac{\rho_2}{k \sinh kh_2}$$

が導かれる。これが normal mode 方程式である。ただし、有効外力

$$g_s(t) = \rho_2 g(t) + k^2 \gamma_s, \quad (15)$$

$$g_i(t) = (\rho_1 - \rho_2)g(t) + k^2 \gamma_i \quad (16)$$

を定義した。また、 $T_{s,i}$ の k 成分を $T_{sk,ik}$ で、時間微分をドットで表した。

磁気効果がなく $T_{s,i} = 0$ であって、更に上層厚 h_2 が大きいか上層密度 ρ_2 が小さくて結合定数が $\Delta \simeq 0$ となる場合、式 (14) は互いに独立な表面と界面の振動方程式になる。 $g(t)$ が時間によらず一定ならば、 p_k, q_k の振動周波数

$$p_k: \quad \omega = \sqrt{\left(g + \frac{k^2 \gamma_s}{\rho_2}\right) k \tanh kh_2}, \quad (17)$$

$$q_k: \quad \omega = \sqrt{\frac{[(\rho_1 - \rho_2)g + k^2 \gamma_i]k}{\rho_1 \coth kh_1 + \rho_2 \coth kh_2}} \quad (18)$$

はそれぞれ、自由表面波、または表面を固定壁とする密度界面波のものに一致する [2]。 $\Delta \neq 0$ のときは、 $p_k, q_k \propto e^{i\omega t}$ と置いて係数行列式を 0 とすれば、 ω^2 の 2 根のうち大きい方が表面波モード、小さい方が界面波モードの周波数を与える。 $g(t)$ や $T_{s,i}$ が時間に依存するときは、normal mode 方程式を直接調べることになる。

3 磁気応力の算出

表面または界面が変動すると、磁場の分布が変わり、流体に加わる力も変化する。ここでは、表面変位 η 、界面変位 ζ が小さく、これらを線形に扱える

範囲で、磁気応力差 $T_{s,i}$ の変化を求めよう。ただし、磁束密度 B と磁場 H は鉛直成分 z と水平成分 y を共に持ち、また透磁率 μ の異なる各領域で $B = \mu H$ の関係があるとする。

電流のない領域では、Ampère の法則 $0 = \nabla \times H$ より磁場は磁気ポテンシャル Ψ の勾配で $H = \nabla \Psi$ と表されるので、これを磁束保存則と組み合わせて Laplace 方程式 $0 = \nabla \cdot B = \mu \nabla^2 \Psi$ が導かれる。 η, ζ による磁束密度と磁場の摂動量 b, h についても全く同様の関係が成り立つため、 $h = \nabla \psi$ で導入される磁気ポテンシャル ψ もやはり Laplace 方程式 $0 = \mu \nabla^2 \psi$ を満たす。

摂動によって磁束密度と磁場が B_0, H_0 から B, H まで変化したとき、それらの法線成分 n 、接線成分 s には次の関係がある。

$$z = h_2 + \eta : \begin{cases} B_{n4} \simeq B_{0z4} + b_{z4} - \eta' B_{0y4}, \\ B_{n2} \simeq B_{0z2} + b_{z2} - \eta' B_{0y2}, \\ H_{s4} \simeq -H_{0y4} - h_{y4} - \eta' H_{0z4}, \\ H_{s2} \simeq -H_{0y2} - h_{y2} - \eta' H_{0z2}, \end{cases} \quad (19)$$

$$z = \zeta : \begin{cases} B_{n2} \simeq B_{0z2} + b_{z2} - \zeta' B_{0y2}, \\ B_{n1} \simeq B_{0z1} + b_{z1} - \zeta' B_{0y1}, \\ H_{s2} \simeq -H_{0y2} - h_{y2} - \zeta' H_{0z2}, \\ H_{s1} \simeq -H_{0y1} - h_{y1} - \zeta' H_{0z1}, \end{cases} \quad (20)$$

$$z = -h_1 : \begin{cases} B_{n1} = B_{0z1} + b_{z1}, \\ B_{n3} = B_{0z3} + b_{z3}, \\ H_{s1} = -H_{0y1} - h_{y1}, \\ H_{s3} = -H_{0y3} - h_{y3}. \end{cases} \quad (21)$$

ただし各領域の B, H を 1, 2, 3, 4 で区別し、変位の y 方向微分を η', ζ' と表した。ここには、 B_n と H_s が摂動の有無に関わらず連続量であることも示して

ある．無擾動下の不連続量を

$$z = h_2 + \eta : \begin{cases} [B]_s \equiv B_{0y4} - B_{0y2}, \\ [H]_s \equiv H_{0z4} - H_{0z2}, \end{cases} \quad (22)$$

$$z = \zeta : \begin{cases} [B]_i \equiv B_{0y2} - B_{0y1}, \\ [H]_i \equiv H_{0z2} - H_{0z1} \end{cases} \quad (23)$$

と表せば，式 (19) - (21) からは ψ に対する境界条件が導かれる．

$$z = h_2 + \eta : \begin{cases} \eta'[B]_s = b_{z4} - b_{z2} = \mu_0 \frac{\partial \psi_4}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \\ -\eta'[H]_s = h_{y4} - h_{y2} = \frac{\partial \psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \end{cases} \quad (24)$$

$$z = \zeta : \begin{cases} \zeta'[B]_i = b_{z2} - b_{z1} = \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \\ -\zeta'[H]_i = h_{y2} - h_{y1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \end{cases} \quad (25)$$

$$z = -h_1 : \begin{cases} 0 = b_{z1} - b_{z3} = \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \mu_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial z}, \\ 0 = h_{y1} - h_{y3} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y}. \end{cases} \quad (26)$$

ここで，式 (13) と同様に，各領域の磁気ポテンシャルを

$$\psi_{1,2,3,4}(x, y, z, t) = \sum_{\kappa} \tilde{S}_{\kappa}(x, y) \psi_{1\kappa, 2\kappa, 3\kappa, 4\kappa}(z, t) \quad (27)$$

と展開する．基底関数 $\tilde{S}_{\kappa}(x, y)$ は (10) と同形の方程式を満たすが，境界条件は必ずしも $S_{\kappa}(x, y)$ と同じでない． $\psi_{1,2,3,4}$ が Laplace 方程式と境界条件 (24) - (26) を満たすように $\psi_{1\kappa, 2\kappa, 3\kappa, 4\kappa}$ を決めると，次のようになる．

$$\begin{aligned} \psi_{4\kappa} &= (a_2 \mu_2 + b_2 - \eta[H]_s) e^{-\kappa(z-h_2)}, \\ \psi_{2\kappa} &= a_2 [\mu_2 \cosh \kappa(z-h_2) - \mu_0 \sinh \kappa(z-h_2)] + b_2 e^{-\kappa(z-h_2)}, \\ \psi_{1\kappa} &= a_1 [\mu_1 \cosh \kappa(z+h_1) + \mu_0 \sinh \kappa(z+h_1)], \\ \psi_{3\kappa} &= a_1 \mu_1 e^{\kappa(z+h_1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{f} \left[\frac{f_{22}\zeta'[B]_i}{\kappa} - f_{12}\zeta[H]_i + (\mu_2 f_{22} - f_{12})e^{\kappa h_2} b_2 \right], \\
a_2 &= -\frac{1}{f} \left[\frac{f_{21}\zeta'[B]_i}{\kappa} + f_{11}\zeta[H]_i + (\mu_2 f_{21} + f_{11})e^{\kappa h_2} b_2 \right], \\
b_2 &= \frac{\eta'[B]_s - \mu_0 \kappa \eta[H]_s}{\kappa(\mu_2 - \mu_0)},
\end{aligned} \tag{29}$$

$$f_{11} = \mu_1(\mu_1 \sinh \kappa h_1 + \mu_0 \cosh \kappa h_1),$$

$$f_{21} = \mu_1 \cosh \kappa h_1 + \mu_0 \sinh \kappa h_1,$$

$$f_{12} = \mu_2(\mu_2 \sinh \kappa h_2 + \mu_0 \cosh \kappa h_2),$$

$$f_{22} = \mu_2 \cosh \kappa h_2 + \mu_0 \sinh \kappa h_2,$$

$$f = f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21}.$$

磁気応力差は、式 (19) - (21) に示した連続量によって次のように表される。

$$\begin{aligned}
T_{s,i} &= \frac{1}{2} (H_n B_n - H_s B_s)_{4,2} - \frac{1}{2} (H_n B_n - H_s B_s)_{2,1} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_{0,2}} - \frac{1}{\mu_{2,1}} \right) B_{n4,2}^2 - (\mu_{0,2} - \mu_{2,1}) H_{s2,1}^2 \right].
\end{aligned} \tag{30}$$

これを式 (19), (20) によって線形化して ψ で表すと,

$$\begin{aligned}
T_{s,i} &\Rightarrow [H]_{s,i} b_{z4,2} - [B]_{s,i} h_{y2,1} \\
&= [H]_{s,i} \mu_{0,2} \left(\frac{\partial \psi_{4,2}}{\partial z} \right)_{z=h_2,0} - [B]_{s,i} \left(\frac{\partial \psi_{2,1}}{\partial y} \right)_{z=h_2,0}
\end{aligned} \tag{31}$$

となる。この κ 成分に式 (28) を代入して η, ζ について整理すれば、求める磁気応力差の変化が得られる。

$$\begin{aligned}
T_{s\kappa} &= \frac{1}{\kappa} \{ g_{HsHs} [H]_s^2 \kappa^2 \eta + g_{BsBs} [B]_s^2 \eta'' \\
&\quad + g_{HsHi} [H]_s [H]_i \kappa^2 \zeta + g_{BsBi} [B]_s [B]_i \zeta'' \\
&\quad + g_{BsHi} [B]_s [H]_i \kappa \zeta' + g_{HsBi} [H]_s [B]_i \kappa \zeta' \}, \\
T_{i\kappa} &= \frac{1}{\kappa} \{ g_{HiHi} [H]_i^2 \kappa^2 \zeta + g_{BiBi} [B]_i^2 \zeta'' \\
&\quad + g_{HsHi} [H]_s [H]_i \kappa^2 \eta + g_{BsBi} [B]_s [B]_i \eta'' \\
&\quad - g_{BsHi} [B]_s [H]_i \kappa \eta' - g_{HsBi} [H]_s [B]_i \kappa \eta' \},
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
g_{\text{HsHs}} &\equiv (\mu_2 f_{21} \sinh \kappa h_2 + f_{11} \cosh \kappa h_2) \mu_0 \mu_2 / f, \\
g_{\text{BsBs}} &\equiv (\mu_2 f_{21} \cosh \kappa h_2 + f_{11} \sinh \kappa h_2) / f, \\
g_{\text{HiHi}} &\equiv f_{11} f_{12} / f, \quad g_{\text{BiBi}} \equiv f_{21} f_{22} / f,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
g_{\text{HsHi}} &\equiv \mu_0 \mu_2 f_{11} / f, \quad g_{\text{BsBi}} \equiv \mu_2 f_{21} / f, \\
g_{\text{BsHi}} &\equiv \mu_2 f_{11} / f, \quad g_{\text{HsBi}} \equiv \mu_0 \mu_2 f_{21} / f.
\end{aligned} \tag{34}$$

なお、式 (28), (29), (32) における η, ζ とそれらの微分を、 $\tilde{S}_\kappa(x, y) \sim e^{ik_y y}$ (k_y は波数ベクトルの磁場方向成分) として

$$\begin{aligned}
\eta &= p_{k_y}, \quad \eta' = ik_y p_{k_y}, \quad \eta'' = -k_y^2 p_{k_y}, \\
\zeta &= q_{k_y}, \quad \zeta' = ik_y q_{k_y}, \quad \zeta'' = -k_y^2 q_{k_y}
\end{aligned}$$

のように扱うと、 $T_{s\kappa, i\kappa}$ は次のような骨組みを持つ量であることがわかる。

$$\begin{aligned}
T_{s\kappa} &= G_1 p_\kappa + (G_3 + ik_y G_4) q_\kappa \\
T_{i\kappa} &= G_2 q_\kappa + (G_3 - ik_y G_4) p_\kappa.
\end{aligned} \tag{35}$$

ここで $G_{1,2}$ は対角的な量 (33) によって、 $G_{3,4}$ は非対角的な量 (34) によって構成され、いずれも実数である。 $G_{3,4}$ は $h_2 \rightarrow \infty, \mu_2 \rightarrow 0$ の極限で 0 となり、表面と界面の運動は分離される。

4 考察

ここまでは、 η, ζ, ϕ の展開に使った基底関数 $S_k(x, y)$ と ψ の展開に使った $\tilde{S}_\kappa(x, y)$ 、および波数 k と κ を区別しておいた。閉鎖系の場合、変位と速度ポテンシャルについては法線微分が 0 という容器端条件が明白に成立するのに対し、磁気ポテンシャルは一般に、容器端から外側へしみ出すため、同じ条件が成り立つとは限らないからである。しかし次のような場合は、両方の波数系列は一致する。

1. 容器端より外側の透磁率が0に近い.
2. 容器端の磁場が常に鉛直方向である.
3. 開放系で進行波を考えている.

進行波の場合, η, ζ の展開にも, $S_k(x, y)$ の代わりに $\tilde{S}_\kappa(x, y) \sim e^{ik_y y}$ を使い, 式 (35) を式 (14) に代入すれば, normal mode 方程式は

$$\begin{pmatrix} t_2 & -\Delta \\ -\Delta & t_1 + t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_\kappa \\ \ddot{q}_\kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_s(t) + G_1 & G_3 + ik_y G_4 \\ G_3 - ik_y G_4 & g_i(t) + G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\kappa \\ q_\kappa \end{pmatrix} = 0 \quad (36)$$

という形にまとまる. 係数 $G_3 \pm ik_y G_4$ は, 表面と界面の間に空間的な位相差が生じることを示している. 表面変位の κ 成分は (この議論では, κ を k_y の意味で使う), normal mode 方程式から求めた p_κ を使って $\eta_\kappa \sim p_\kappa \tilde{S}_\kappa + p_{-\kappa} \tilde{S}_{-\kappa}$ のように, また界面変位も同様に計算できる. 定在波の場合の表面変位は, $p_{-\kappa} = p_\kappa, q_{-\kappa} = q_\kappa$ が成り立つので, $\eta_\kappa \sim (p_\kappa + p_{-\kappa})(\tilde{S}_\kappa + \tilde{S}_{-\kappa})/2$ のように計算する. これを考慮して式 (36) を $p_\kappa + p_{-\kappa}, q_\kappa + q_{-\kappa}$ についての方程式に書き直せば, それはもとの式から G_4 を落としたものに一致する. なお, normal mode 方程式からは, 次のエネルギー保存則が導かれる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[t_1 \frac{|\dot{p}_\kappa|^2}{2} + (t_1 + t_2) \frac{|\dot{q}_\kappa|^2}{2} - \Delta \operatorname{Re}(\dot{p}_\kappa^* \dot{q}_\kappa) \right. \\ & \left. + (g_s + G_1) \frac{|p_\kappa|^2}{2} + (g_i + G_2) \frac{|q_\kappa|^2}{2} + \operatorname{Re}(G_3 - ik_y G_4) p_\kappa^* q_\kappa \right] \\ & = (\dot{g}_s + \dot{G}_1) \frac{|p_\kappa|^2}{2} + (\dot{g}_i + \dot{G}_2) \frac{|q_\kappa|^2}{2} + \operatorname{Re}(\dot{G}_3 - ik_y \dot{G}_4) p_\kappa^* q_\kappa. \end{aligned} \quad (37)$$

式 (36) において $p_k = 0, q_k = e^{i\omega t}, g(t) = g, \mu_0 \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\begin{aligned} & \omega^2 \rho_2 \coth kh_2 + \omega^2 \rho_1 \coth kh_1 \\ & = gk(\rho_1 - \rho_2) + k^3 \gamma_i \\ & - \left[\frac{k^2 \mu_1 \mu_2 (H_{0z2} - H_{0z1})^2}{\mu_1 \tanh kh_2 + \mu_2 \tanh kh_1} - \frac{k_y^2 H_y^2 (\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_1 \coth kh_1 + \mu_2 \coth kh_2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

が得られるが、これは界面の安定性を議論するために用いられる分散関係式 [3] において、各層の平均流速を 0 としたものに一致する。

ここで考えている二層流体の状況は、

(a) $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ として p, T_s に着目する、

(b) $h_2 \rightarrow \infty$ として q, T_i に着目する、

という 2通りの方法で、自由表面のみの場合へ還元できる。いずれの場合でも $G_{3,4} \rightarrow 0$ であり、次いで (a) と (b) の間で $\mu_0 \leftrightarrow \mu_2, \mu_2 \leftrightarrow \mu_1, h_1 + h_2 \leftrightarrow h_1$ という対応を取れば、(a) の T_s と (b) の T_i の表式は一致し、式 (32) が正しいことが証明される。

5 まとめ

表面と界面のある二層磁性流体を解析するための基礎となる normal mode 方程式を導き、若干の考察を加えた。これにより、分散関係式による界面の安定性や、変動する外力や磁場に対する流体の応答を議論することができるであろう。

参考文献

- [1] T.B.Benjamin and F.Ursell: The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc.Roy.Soc., A*, **225**, p.505 (1954).
- [2] H.Lamb: *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, p.371 (1932).
- [3] R.E.Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, p.199 (1985).